ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 111 σχολικού βιβλίου.

Α2. Σελίδα 104 σχολικού βιβλίου.

Α3. Σελίδα 128 σχολικού βιβλίου.

Α4. α) Λάθος

β)Λάθος

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1)

$$\left.\begin{array}{l} x \in A_h \\ h(x) \in A_g \end{array}\right\} x > 0,\ \ln x \in \Re \Leftrightarrow x>0 \;\Big|\; A_{goh} = (0.+\infty)$$

$$f(x) = g(h(x)) = \frac{4-e^{2\ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4-e^{\ln x^2}}{x} = \frac{4-x^2}{x} \quad ,\ x>0$$

Β2)

f συνεχής στο Α=(0,+∞) ως ρητή.

$$\text{i)} f'(x) = \frac{(4-x^2)'\cdot x-(4-x^2)\cdot x'}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{-2x^2-4+x^2}{x^2} = \frac{-x^2-4}{x^2} < 0 \quad \forall x>0$$

H f γν. φθίνουσα

$$\text{ii)} \ \frac{4-\pi^2}{4-e^2} > \frac{\pi}{e} \xrightarrow[e>0]{4-e^2<0} \frac{4-\pi^2}{\pi} < \frac{4-e^2}{e} \Leftrightarrow f(\pi) < f(e) \xrightarrow{f\swarrow} \pi > e \text{ ισχύει}$$

Β3)

•) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{4-x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+}(4-x^2)\frac{1}{x} = 4(+\infty) = +\infty$, $\left.\begin{matrix}\lim_{x\to 0^+} x = 0\\ x>0\end{matrix}\right\}$ άρα $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$

άρα η x=0 κατακόρυφη ασύμπτωτη δεξιά του μηδενός.

•) $\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{4-x^2}{x^2} = \lim_{x\to +\infty}\frac{-x^2}{x^2} = -1$

•) $\lim_{x\to +\infty}(f(x)+x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{4-x^2}{x}+x\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{4-x^2+x^2}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{4}{x} = 0,\quad \lim_{x\to +\infty} x = +\infty$ άρα $\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x} = 0$

Αρα η y=-x πλάγια ασύμπτωτη στο +∞

B4)

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\frac{-x^2}{x} = -\infty$ άρα f(x)<0 κοντά στο -∞

$$-1 \le \sigma\upsilon\nu(1+x^2) \le 1 \xrightarrow{:f(x)} \frac{1}{f(x)} \le \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} \le -\frac{1}{f(x)}$$

$\left.\begin{matrix}\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{f(x)} = 0\\ \lim_{x\to +\infty}\left(-\frac{1}{f(x)} = 0\right)\end{matrix}\right\}$ απ' το κριτήριο παρεμβολής και το $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} = 0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) $\int_2^3 xf(x)dx = 1$, $\int_2^3 (1+ax)dx = 1 \Leftrightarrow [x+\frac{ax^2}{2}]_2^3 = 1 \Leftrightarrow 1+\frac{7a}{2} = 1 \Leftrightarrow a = 0$

Γ2) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 = f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$, άρα η fσυνεχής στο x=1.

Fσυνεχής στο (-∞ , 1) ως πολυώνυμο

F συνεχής στο (1, +∞) ως ρητή

άρα , η f συνεχής στο R.

$$\lim_{x->1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{1-x}{x(1-x)} = \lim_{x->1^+}\frac{-(x-1)}{x(x-1)} = -1$$

$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = -1$
)

άρα, η f'(1)=-1 και η εφαπτομένη της Cστο x_0=1 ορίζεται.

ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C στο x_0=1 είναι (ε) : y-f(1)=f'(1)(x-1)

y-1=-1(x-1)

y=-x+2

Αν ω η γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον χχ΄, τότε εφω=-1 αρα ω=135^0

Γ3

Για $x<1$ $\begin{matrix} f(x)=x^2-3x+3 \\ f'(x)=2x-3<0 \end{matrix}$. Έτσι fγν. φθίνουσα στο $A_1=(-\infty,1)$ και

$$f(A_1)=\left(\lim_{x\to 1^-} f(x), \lim_{x\to -\infty} f(x)\right)=(1,+\infty)$$

Για $x \geq 1$ $\begin{matrix} f(x)=\frac{1}{x} \\ f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0 \end{matrix}$. Έτσι fγν. φθίνουσα στο $A_2=[1,+\infty)$ και

$$f(A_2)=\left(\lim_{x\to +\infty} f(x), f(1)\right]=(0,1]$$

$f(A_1)\cap f(A)=\varnothing$ και $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=(0,+\infty)$

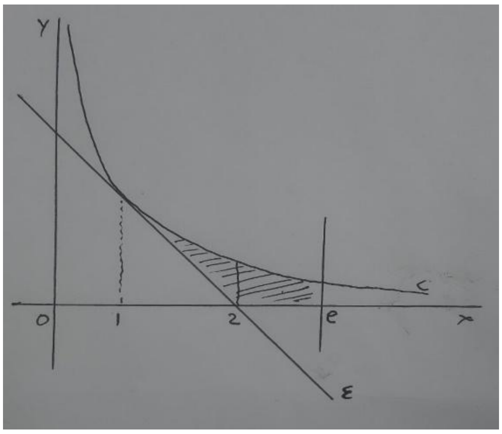
Γ4

$$E=\int_1^2 (f(x)+x-2)dx+\int_2^e f(x)dx=$$

$$=\int_1^2\left(\frac{1}{x}+x-2\right)dx+\int_2^e \frac{1}{x}dx=$$

$$=\left[\ln|x|+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2+\left[\ln|x|\right]_2^e=$$

$$=\frac{1}{2}$$



ΘΕΜΑ Δ

Δ1)

$$\frac{\ln(2-x)-\frac{1}{x}+k-2x}{x-1}=g(x),\ \lim_{x\to1}g(x)=l\in\Re$$

$$\ln(2-x)-\frac{1}{x}+k-2x=g(x)\cdot(x-1)\Leftrightarrow\lim_{x\to1}\left[l\,n(2-x)-\frac{1}{x}+k-2x\right]=\lim_{x\to1}\left[g(x)\cdot(x-1)\right]$$

$$-3+k=l\cdot0\Leftrightarrow-3+k=0\Leftrightarrow k=3$$

Δ2)

$f(x)=\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3,$ η f συνεχής στο (0,2) ως πράξεις συνεχών.

$$f'(x)=\frac{-1}{2-x}+\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2+2-x}{x^2(2-x)}$$

•) $-x^2+2-x\to\Delta=1+8=9,\ \ \mathrm{x}=\frac{1\pm3}{-2}\ \ \mathrm{x}_1=-2$ και $\mathrm{x}_2=1$

•) $x+2=0\Rightarrow x=-2$

•)f συνεχής στο $\mathrm{A}_1=(0,1]$ και γν.αύξουσα άρα

$$\mathrm{f}\left((0,1]\right)=\left(\lim_{x\to0^+}f(x),f(1)\right]=(-\infty,2]$$

•) $o\in f(A_1)$ άρα $\exists\ \mathrm{x}_1\in(0.1): f(x_1)=0$ $\left(\textit{μοναδικό}\text{ λόγω μονοτονίας}\right)$

•)f συνεχής στο $\mathrm{A}_2=[1,2)$ και γν.φθίνουσα άρα

$$\mathrm{f}\left(\mathrm{A}_2\right)=\left(\lim_{x\to2^-}f(x),f(1)\right]=(-\infty,2]$$

•) $o\in f(A_2)$ άρα $\exists\ \mathrm{x}_2\in(1.2): f(x_2)=0$ $\left(\textit{μοναδικό}\text{ λόγω μονοτονίας}\right)$

•) $f\left(\frac{1}{3}\right)=\ln\left(2-\frac{1}{3}\right)-3+3=\ln\left(\frac{5}{3}\right)>0=f(x_1)$

f γν.αύξουσα άρα $\mathrm{x}_1<\frac{1}{3}$

Δ3)

Αρκεί $f'(\xi)=\dfrac{3\cdot f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$ $\xi \in (0,1)$

•)f συνεχής στο $[x_1,\frac{1}{3}]$ και f παραγωγίσιμη στο $(x_1,\frac{1}{3})$

•)Απο το Θ.Μ.Τ. $\exists$ $\xi \in \left(x_1,\frac{1}{3}\right) \subseteq (0,1)$: $f'(\xi)=\dfrac{f\left(\frac{1}{3}\right)-f(x_1)}{\frac{1}{3}-x_1}=\dfrac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1-3x_1}{3}}=\dfrac{3\cdot f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$

Δ4)

$i)\left.\begin{array}{l} G'(x)=f(x)=F'(x) \\ F(x_1)=0=G(x_2) \end{array}\right| G'(x)=F'(x)$ άρα $\exists$ $c \in \Re$:F(x)=G(x)+c

$\xrightarrow{x=x_1} F(x_1)=G(x_1)+c \Rightarrow c=-G(x_1)$

$\xrightarrow{x=x_2} F(x_2)=G(x_2)-G(x_1) \Rightarrow F(x_2)+G(x_1)=0$

$ii) x_1F(x)+x_2G(x)-x_1-x_2+2x=H(x)$

•)H συνεχής στο $[x_1.x_2]$ ως πράξεις συνεχών.

$H(x_1)=x_1F(x_1)+x_2G(x_1)-x_1-x_2+2x_1=x_2G(x_1)+x_1-x_2<0$

$H(x_2)=x_1F(x_2)+x_2G(x_2)-x_1-x_2+2x_2=x_1(-G(x_1))-x_1+x_2=-H(x_1)>0$

$H(x_1)\cdot H(x_2)<0$ (*)

Απ'το Θ.Bolzano υπάρχει $x_o \in (x_1,x_2): H(x_o)=0$

$H'(x)=x_1f(x)+x_2f(x)+2=(x_1+x_2)f(x)+2>0$ άρα η H γν.αύξουσα στο (x_1,x_2) και το x μοναδικό

$(*) x_1<x<1 \xrightarrow{f\nearrow} f(x_1)<f(x) \Leftrightarrow f(x)>0$

$1<x<x_2 \xrightarrow{f\swarrow} f(x)>f(x_2)=0$

H $f(x)\geq 0$ στο $[x_1,x_2]$

$G'(x)=f(x)\geq 0$ άρα G γν.αύξουσα στο $[x_1,x_2]$

$x_1<x_2 \xrightarrow{G\nearrow} G(x_1)<G(x_2) \Leftrightarrow G(x_1)<0$